

Algebra 2 Übersicht

1 Multilineare Algebra

1.1 Moduln

R -Modul Grunddefinitionen und Beispiele

R -Modul Grundeigenschaften

Def: freier Modul

Projektive Moduln

Beweis: Sequenz projektiver Moduln

Beweis: Sequenz injektiver Moduln

Beispiele für nicht projektive / injektive Moduln

Beweis: Freie Moduln sind projektiv. Jeder R -Modul ist Faktormodul ...

Prop+Beweis: proj. Modul $\Leftrightarrow F = N \oplus N'$ frei

1.2 Tensorprodukt

Tensorprodukt: Definition und Beispiele

Satz 1: Tensorprodukt

Tensorprodukt-Äquivalenzen und Beweis

Tensorprodukt mit Idealen

1.3 Flache Moduln

Funktor $\otimes_R N$ mit Beispiel

Flacher Modul und 3 Bemerkungen

Projektive Moduln sind flach (drei-teiliger Beweis)

1.4 Tensoralgebra

Def: Algebra, 2 Funktoren, Beispiele

UAE von $R' \otimes_R R''$

Def: Tensoralgebra

1.5 Symmetrische und äußere Algebra

Def: symmetrische und alternierende Abbildungen

Satz 2: symmetrische und äußere Potenz

Satz: Struktur von $S^n(M)$ und $\Lambda^n(M)$

1.6 Differentiale

Def: Derivation mit Beispielen

Darstellbarkeit von $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$

2 Beispiele: $\Omega_{R[X_1, \dots, X_n]/R}$ $\Omega_{\mathcal{C}^\infty(X)/R}$

$\Omega_{./R}$ ist rechtsexakter Funktor

1.7 Der de Rham-Komplex

Def+Satz: de Rham-Komplex

2 Beispiele zu $H_{dR}^i(A)$

2 Noethersche Ringe und Moduln

2.1 Der Hilbertsche Basissatz

Def+Bsp: noethersch

Satz+Bew: $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ noethersch Äquivalenz

Satz: Endlich erzeugbare Moduln über noetherschen Ringen

Drei Äquivalenzen zu noethersch

Satz: Hilbertsche Basissatz + zwei Folgerungen

2.2 Ganze Ringerweiterungen

Def: ganz, normiert, ganzer Abschluss, ganz abgeschlossen, normal; Satz zu normal

Äquivalenzen zu ganz

2.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 5: Hilbertsche Nullstellensatz

Def+Bsp: Verschwindungsideal, Nullstellenmenge + 2 Beispiele

Satz: Schwacher Nullstellensatz

Satz: Starker Nullstellensatz

2.4 Graduierte Ringe und Moduln

Def: graduierter Ring, homogen; 1 Bemerkung

Def: homogenes Ideal; 2 Bemerkungen

3 Beispiele zu homogenen Idealen

Drei Äquivalenzen für noethersche graduierte Ringe

Def: graduierter S -Modul, graderhaltend, $\text{Grad}(\varphi)$, Twist

Satz: $\dim S_d^{(n)} = \dots$ in $S = K[X_1, \dots, X_n]$

Satz: Hilbert-Polynom

Def: Hilbert-Reihe mit 3 Beispielen

Satz 6': Hilbert-Reihe

2.5 Invarianten endlicher Gruppen

Def: Invariantenring, linear; 2 Beispiele

Satz: Endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings

Beispiel eines Invariantenrings

2.6 Nakayama, Krull und Artin-Rees

Def+Bem+Bsp: Jacobson Radikal

Satz: Lemma von Nakayama + Folgerungen und Beispiel

Proposition: Artin-Rees

Satz 9: Durchschnittssatz von Krull

Beispiele zu Artin-Rees

2.7 Krull-Dimension

Def+Bsp: Krull-Dimension

Bem: Krull-Dimension von nullteilerfreien Ringen

Satz 10: Primidealketten in Ringerweiterungen

Folgerung über Maximalität von Primidealen in Ringerweiterungen

Satz 11: Noether-Normalisierung

2.8 Das Spektrum eines Rings

Def+Bsp+Bem: Spektrum eines Rings

3 Bem zu Spektrum, Zariski-Topologie

Def: irreduzibel, Prop dazu mit Primideal

Folg: mit hausdorffsch, Def Verschwindungsideal + Folgerung

Def+Bem: Irreduzible Komponente

Prop: Spec als Funktor: Auswirkungen eines Ringhomomorphismus

2.9 Diskrete Bewertungsringe

Def: diskrete Bewertung + Beispiele

Def: Absolutbetrag und Geometrie: Kreis und Dreieck

Def+Bem: \mathbb{Q}_p und \mathcal{O}_v lokaler Ring

Def+Prop: Diskreter Bewertungsring

Satz 12: Diskrete Bewertungsringe + 1 Gegenbeispiel

2.10 Dedekindringe

Def: Dedekindring + 4 Beispiele

Def: gebrochenes Ideal, invertierbares Ideal, 5 Beispiele, 1 Bemerkung

Satz 13: Dedekindringe

Satz 14: Dedekindring und L/K Körpererweiterung

2.11 Primärzerlegung

Def+Bem+Bsp: Primärideal

Def: \mathfrak{p} -primär Primärzerlegung, reduzierte

Satz 15: Reduzierte Primärzerlegung